

Haus der Mathematik – ein außerschulischer Lernort

MONIKA MUSILEK, WIEN

Das Haus der Mathematik (HdMa) ist ein außerschulischer Lernort an der Pädagogischen Hochschule Wien, der sich dem Entdecken mathematischer Phänomene widmet: Ausgangspunkt sind interaktive Ausstellungsobjekte (Exhibits), an denen man Mathematik angreifen und dadurch idealerweise auch begreifen kann. Durch eigenständiges und aktiv-entdeckendes Experimentieren werden den Besucher*innen mathematische Zusammenhänge und Phänomene nahegebracht. Das Haus der Mathematik weist neben dem (stationären) Museum ein sehr breites Spektrum an Angeboten auf, wodurch Rahmenbedingungen für forschende und entdeckende Lernanlässe in Mathematik geschaffen werden können. In diesem Beitrag wird das HdMa als außerschulischer Lernort vorgestellt, exemplarisch Ideen hinter den Exhibits beschreiben. Es wird gezeigt, welches Potential in diesen Ausstellungsobjekten liegt und wie ein Transfer in den Unterricht aussehen kann. Weitere Angebote, u.a. zum Lehren und Lernen im HdMa, werden skizziert.

1. Was ist das Haus der Mathematik?

Wie schafft man es, Schülerinnen und Schüler für Mathematik zu begeistern? Man lässt sie Mathematik erleben, angreifen, begreifen. Gerhard Lindbichler gründete gemeinsam mit Manfred Kronfellner im Jahr 2003 das Haus der Mathematik (abgekürzt: HdMa) mit der Idee, einen Lernraum zu gestalten, in dem es Besucherinnen und Besuchern ermöglicht wird, durch eigenständiges und spielerisches Experimentieren mathematische Zusammenhänge und Phänomene zu entdecken.

Das stationäre Haus der Mathematik umfasst mehrere Räume. Die *Erlebnisswelt* wurde als Science Center konzipiert. In ihr werden Anregungen für interaktive und eigenständige Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten durch Ausstellungsobjekte, sogenannten Exhibits, geboten (siehe Abb. 1). Der Fokus liegt hier nicht vorrangig am Vermitteln formaler Inhalte, sondern den Besucherinnen und Besuchern soll es ermöglicht werden, mathematische Phänomene haptisch zu erleben, Zusammenhänge zu erkennen und Neues mit Bekanntem zu verknüpfen. Eigens dafür ausgebildete „Explainer“ (Vermittlerinnen und Vermittler) unterstützen dabei.



Erlebnisswelt



Königsberger Brückenproblem

Abb. 1: Science Center - HdMa

Ein weiterer Raum des HdMa ist das *Museum*, hier wird durch die Geschichte der Mathematik geführt. Beginnend vor rund 4500 Jahren in Ägypten über die „alten“ Griechen bis hin zur Neuzeit werden wichtige Meilensteine der Mathematik erlebbar gemacht. Wiederum gilt das Motto: „Angreifen, begreifen erlaubt“. Der *Marktplatz* ergänzt die Räume des HdMa. Er dient als Versammlungsort, wo sich Besucherinnen und Besucher gemeinsam mit den Explainern über Mathematik austauschen können. Auch hier wird versucht, Mathematik erlebbar, interaktiv zu gestalten.

1.1 Fakten zum HdMa

Das Haus der Mathematik ist ein Verein, die Pädagogische Hochschule Wien stellt dem Verein die Räumlichkeiten zur Verfügung und darf im Gegenzug die Erlebniswelt für Lehrveranstaltungen und Fortbildungsveranstaltungen nutzen.

Das HdMa wird pro Jahr von über 1 000 Schülerinnen und Schülern besucht. Es hat für Schulklassen zweimal pro Woche offen, wobei vorab ein Termin über das Onlinebuchungssystem vereinbart werden muss. Wir empfehlen einen Besuch im Haus der Mathematik für Schülerinnen und Schüler ab der vierten Schulstufe. Ein Blick auf die Statistik der vergangenen Jahre zeigt, dass etwa 70 % der Besuche von Schulklassen die Sekundarstufe 1 betreffen.

Ein Besuch im HdMa gliedert sich in 3 Teile:

1. einem ersten Hinführen zu mathematischem Denken durch (oder mit) Mathemagie und mathematischen Rätseln auf dem *Marktplatz*
2. einer Phase, bei der mit Hilfe der Exhibits eigenständig zu verschiedensten Themengebieten der Mathematik geforscht und entdeckt werden kann, in der *Erlebniswelt*
3. einer Reise in die Geschichte der Mathematik, im *Museum*.

Diese drei Bereiche sind gemäß des Spiralprinzips vernetzt: herausragende Ideen der Mathematik werden sowohl am *Marktplatz* diskutiert, als auch im *Museum* veranschaulicht und in der *Erlebniswelt* auf unterschiedlichste Art und Weise entdeckbar und erforschbar gemacht.

Neben den Besuchen von Schulklassen gibt es eine Reihe von weiteren Aktivitäten im HdMa. Einmal pro Monat findet ein sogenannter „offener Samstag“ statt. Jede/r Mathematikinteressierte kann hier – ohne Voranmeldung – das Haus der Mathematik besuchen. Wir bieten aber auch Spezialführungen an, beispielsweise für Erasmusstudierende, Besucher*innen aus dem Ausland, u.v.m. Weiters besteht die Möglichkeit Führungen, die ganz nach individuellen Vereinbarungen getroffen werden, zu gestalten.

Das HdMa findet man auch außer Haus. Wir versuchen durch die Teilnahme an Events, so zum Beispiel an der Langen Nacht der Forschung, an der European Researchers Night, am Spielefest ... zur Popularisierung der Mathematik beizutragen. Aktuelle Informationen zu Besuchsmöglichkeiten und weiteren Aktivitäten findet man stets auf der Webseite hausdermathematik.at.

1.2 Exhibits im HdMa

Die Grundidee, mathematische Phänomene angreifbar, begreifbar zugänglich zu machen, wird durch Exhibits (interaktiven Ausstellungsobjekten) realisiert. An über 70 Ausstellungsobjekten kann man Mathematik entdecken.

Als „Exhibit“ definiert McLean interaktive Ausstellungsobjekte

“... in which visitors can conduct activities, gather evidence, select options, form conclusions, test skills, provide input, and actually alter a situation based on input” (McLean 1996, S. 93).

Durch die Exhibits im HdMa wird versucht, mathematische Problemstellungen (be)greifbar zu machen. Sie sollen zum Entdeckenden Lernen auffordern. Stets wird das Augenmerk auf das spielerische Erkennen von Mustern, Strukturen und Strategien gelegt. Alle Exhibits in der Erlebniswelt sind Unikate, sie wurden und werden vom Team des HdMa forschungsgeleitet und theoriebasiert entwickelt. Ausgangspunkt für jedes Exhibit ist hierbei immer ein mathematisches Phänomen, ein mathematischer Satz, eine Idee, die in einem Designprozess in ein interaktives Ausstellungsobjekt verwandelt wird. Zwei Exhibits werden im Folgenden vorgestellt: *Binärmeter* und *The Game of Tri*, siehe Abb. 2.

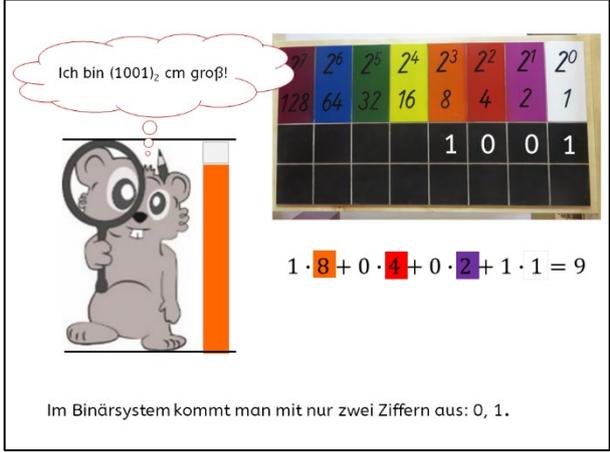


Abb. 2: Exhibit Binärmeter, Exhibit The Game of Tri

Mathematischer Ausgangspunkt für das Exhibit *Binärmeter* in der Erlebniswelt ist das Stellenwertsystem, das bestimmt eine der größten Errungenschaften der Mathematik darstellt. Das dekadische Zahlensystem ist vermutlich allen Besucher*innen gut bekannt, aber ein Exhibit zu gestalten, das hilft, der Frage nachzugehen, welches Zahlensystem im Bereich der Technik eingesetzt wird, und wie dieses funktioniert, war das Ziel eines Entwicklungsprojekts im HdMa. Das Exhibit liefert hier einen ersten Zugang zum Binärsystem, losgelöst aus der Zweidimensionalität von Papier und Bleistift ist ein dreidimensionales, interaktives Exhibit entstanden (vgl. Musilek & Putz 2017). Das Exhibit ermöglicht es, dass die Körpergröße von Kindern und Erwachsenen durch Aufeinanderstapeln von Holzbauklötzen gemessen und anschließend in eine Binärzahl übersetzt werden kann. Jeden Bauklotz gibt es in jeweils einer Farbe und stets nur ein einziges Mal, die Längen der Bauklötze entsprechen dabei einer Potenz von 2 (von 1 cm bis 128 cm). Sind die Bauklötze der Körpergröße entsprechend gestapelt, werden in der Tabelle passend zur Farbcodierung die Werte 0 (für „Bauklotz wurde nicht verwendet“) und 1 („Bauklotz wurde verwendet“) eingetragen. Das Ergebnis ist somit die Körpergröße in cm in Binärdarstellung. Abb. 3 zeigt die Anleitungskarte und eine Beschreibung zur Durchführung.

Binärmeter- Wie groß bist du?

- Staple die Bausteine von groß nach klein an der Wand, bis du deine Körpergröße erreicht hast. Wenn ein Baustein zu groß ist, nimm den nächst kleineren.
- Für jede Bausteinfarbe, die du verwendet hast, trage 1 in die Tabelle passend ein, sonst 0.
- Nun kennst du deine Körpergröße in **Binärdarstellung**.



Ich bin $(1001)_2$ cm groß!

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
128	64	32	16	8	4	2	1
				1	0	0	1

$$1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 9$$

Im Binärsystem kommt man mit nur zwei Ziffern aus: 0, 1.

Abb. 3: Anleitungskarte zum Exhibit *Binärmeter*

Aufgrund vieler Beobachtungen hat sich herausgestellt, dass Spiele immer die Stationen in der Erlebniswelt sind, die von Besucherinnen und Besuchern besonders stark frequentiert werden. Eine wesentliche Anforderung an Spielen mit mathematischem Kern, liegt darin, dass sie ganz einfache und verständliche Regeln haben müssen, die sich in kürzester Zeit vermitteln lassen. Spiele sollten in etwa gleiche Gewinnchance für alle Kinder aufweisen, die Spielregeln variiert sein und das Spiel eine angemessene Spieldauer aufweisen (vgl. Käpnick 2014, S. 185).

Von Spiel zu Spiel können die Besucherinnen und Besucher dann nämlich Erfahrungen sammeln. Sie können idealerweise selbständig Strategien entwickeln und diese dann sehr gezielt einsetzen. „The Game of Tri“ ist ein Strategiespiel für zwei Personen, das für das HdMa einem Exhibitdesign-Prozess unterworfen worden ist (vgl. Musilek 2020). Abb. 4 zeigt die Anleitungskarte und eine Detailaufnahme des Spiels. Zwischen den Eckpunkten eines Sechsecks werden von den beiden Spielern abwechselnd Seile in zwei Farben gespannt. Wer zuerst ein Dreieck in seiner Farbe schafft, gewinnt das Spiel.



The Game of Tri

Ein Spiel für zwei.
Spannt abwechselnd Seile (mit geeigneter Länge) zwischen den Zapfen.

Wer als erste/r ein Dreieck gespannt hat, hat gewonnen!

Zwischen den Zapfen darf immer nur ein einziges Seil gespannt sein.
Die Eckpunkte des Dreiecks müssen Zapfen sein.

HdMa HdMa HdMa FH Wien

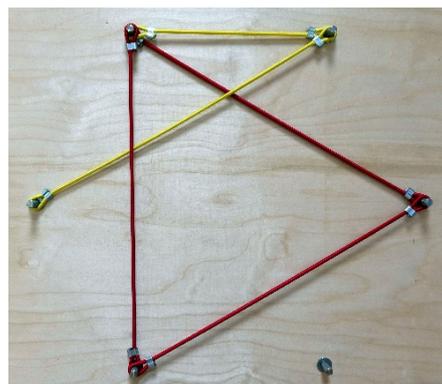


Abb. 4: The Game of Tri: Anleitungskarte, Detailaufnahme des Exhibits im HdMa (rot hat gewonnen)

1.3 Lehren und Lernen im HdMa

Exhibits veranschaulichen mathematische Ideen, mathematische Phänomene. Sie sind daher eng verknüpft mit mathematischen Inhalten und liefern somit einen Anreiz zum Mathematiktreiben. Bei Führungen im HdMa kann allerdings beobachtet werden, dass leider oft nur ein kurzfristig wirkendes Interesse an „Auflösungen“ von Seiten der Besucherinnen und Besucher besteht. Sehr selten stellen sie Fragen, die auf mathematischen Hintergrund abzielen, wenn sie mit den Exhibits „alleine“ gelassen

werden. Um aber gerade den so wichtigen mathematischen Hintergrund zu Tage zu bringen, braucht es daher unbedingt einer entsprechenden Begleitung. Diese wird im HdMa durch sogenannte Explainer (Vermittlerinnen und Vermittler) gewährleistet, die Kinder bei ihren Entdeckungen unterstützen. Explainer sind studentische Mitarbeiter*innen, die im Rahmen einer Zusatzqualifikation ausgebildet werden. Ziel dieser Zusatzqualifikation ist es, dass Studierende praxisbezogene Informationen über Hands-On Didaktik und Aspekte des Entdeckenden Lernens im Bereich Mathematik erhalten. Es soll ihnen das Wissen vermittelt werden, selbstständig Gruppen im Haus der Mathematik begleiten zu können, Hilfestellung und fachbezogene Informationen an die Besucherinnen und Besucher weitergeben zu können und auch Aspekte der Geschichte der Mathematik begreifbar vermitteln zu können. Die Ausbildung findet in mehreren Phasen über ein Semester hinweg statt. Neben der eigenständigen Auseinandersetzung mit den Exhibits wird angeleitet an den mathematischen Hintergründen gearbeitet. In Form eines Peer Tutorings wird der Ablauf von Besuchen im HdMa kennengelernt. Nach mehreren durchgeführten Hospitationen werden schrittweise Angebote im HdMa von den auszubildenden Studierenden übernommen. Für diese Zusatzausbildung können sich alle interessierten Personen melden, sie ist nicht auf Lehramtsstudierende oder auf Studierende bestimmter Fächer oder bestimmter Universitäten bzw. Hochschulen beschränkt. Durch die Vielfalt dieser „beruflichen“ Hintergründe kommt es während der Ausbildung zu einem sehr facettenreichen gemeinsamen Lernen. Studierende aus dem Bereich der Primarstufenpädagogik lernen beispielsweise Sichtweisen von Studierenden aus dem Bereich der Sekundarstufenpädagogik, ergänzt um den Blick von Studierenden technischer Fachrichtungen, kennen und umgekehrt.

Durch die Arbeit im HdMa wird somit ein wesentlicher Beitrag zur eigenen Professionalisierung der Studierenden geleistet. Sie haben die Möglichkeit, den Dialog mit den Schülerinnen und Schülern in der Arbeit mit den Exhibits zu erproben, indem sie Ideen der Kinder als Lernanlässe aufgreifen, Fragen zum mathematischen Inhalt aufwerfen und Schülerinnen und Schüler über Lösungen diskutieren lassen. Sie üben sich im Begleiten von Kindern in ihrem Lernprozess. Sie lernen Möglichkeiten kennen, wie man Kinder zu ausführlichen und durchdachten Aussagen motivieren kann. Sie vermitteln den Kindern die Wichtigkeit, dass Denkprozesse durch lautes Denken vorangetrieben werden können. Kurz gesagt, sie lernen, Kinder auf ihrem Weg im mathematischen Kompetenzaufbau, sowohl inhaltlich als auch allgemein zu unterstützen (vgl. Musilek-Hofer et al. 2017).

Das Haus der Mathematik ist aber nicht nur ein außerschulischer Lernort für Schülerinnen und Schüler. Studierende nutzen das Haus der Mathematik ebenfalls im Rahmen von ihren Lehrveranstaltungen: einerseits im Lehramt für die Sekundarstufe Allgemeinbildung Unterrichtsfach Mathematik im Verbund Cluster Nord Ost (Universität Wien, Pädagogische Hochschule Wien, Pädagogische Hochschule Niederösterreich, Kirchlich Pädagogische Hochschule Wien/Krems) und andererseits auch im Primarstufenlehramt an der Pädagogischen Hochschule Wien. Ein Lernarrangement wurde dafür konzipiert, in dem das Haus der Mathematik der Pädagogischen Hochschule Wien auf vielfältige Art genutzt wird. Ziel ist es u.a., dass Studierende im Rahmen der pädagogisch praktischen Studien die Möglichkeit haben, ausgehend von den Exhibits Entdeckendes Lernen mathematischer Inhalte mit Schülerinnen und Schülern zu erproben und zu reflektieren. (vgl. Musilek-Hofer et al. 2017)

2. HdMa2school

Nach Guderian (2007, S. 37ff.) wird das Potential eines Besuchs an einem außerschulischen Lernort erst dann ausgeschöpft, wenn der Besuch für Schülerinnen und Schüler wahrnehmbar und sinnvoll in das gesamtschulische Geschehen eingebettet ist bzw. mit den Inhalten des Curriculums effektiv verbunden ist. Das HdMa sieht sich daher als Ideenlieferant für eine didaktische Einbettung in den regulären Unterricht und setzt durch das Projekt HdMa2school Unterstützungsangebote für Lehrerinnen und Lehrer.

Zu Grunde liegt die Idee, den Schülerinnen und Schülern einen entdeckenden Zugang beim Mathematiklernen zu ermöglichen. Konkret für Mathematikunterricht fordert Hengartner (1992, S.19):

„Entdeckendes Lernen – oder Entdeckenlassen, Nacherfinden – ist eher eine umfassende Idee vom Lernen und Lehren und weniger ein eindeutig bestimmbarer, beobachtbarer Lernvorgang. Als Leitidee bedeutet es, dass Mathematik auf den Ebenen des Wissens und Könnens, des Verstehens und des Anwendens durch aktives Tun und eigenes Erfahren wirkungsvoller gelernt wird, als durch Belehrung und gelenktes Erarbeiten. Verstehen wird hier als ein individuell bestimmter Vorgang verstanden, den jedes Kind konstruktiv hervorbringt.“

Entdeckendes Lernen ist eine alte pädagogische Idee und eine aktuelle Konzeption von Unterricht, die durch die Ergebnisse neuer Lernforschung bestätigt und erweitert wird (vgl. Winter (1989), Hengartner et al. (2006)). Wesentliche Merkmale sind nach Ernst (2003) die folgenden:

- Lernen ist aktive Konstruktion von Erkenntnis durch die Lernenden.
Es geht um wirkliches Verstehen von Sachverhalten und Zusammenhängen, um Lernen, das Sinn macht und persönliche Bedeutung gewinnt, nicht um die Speicherung von Faktenwissen, nicht um das alleinige Trainieren von Methoden oder Schlüsselkompetenzen.
- Auseinandersetzung zwischen Lernenden und Lehrenden ist dialogisch, entwickelnd und unterstützend.
Die Unterschiedlichkeit der Kinder kann in ihrer Vielfalt gewürdigt werden, ohne die einzelnen in ihrem Leistungswunsch und -vermögen zu behindern.
- Austausch in der Lerngruppe trägt zum gemeinsamen Erkenntnisfortschritt bei und macht es möglich, persönlich erworbenes Wissen in allgemeine Zusammenhänge einzuordnen und das eigene Lernen nach Qualität und Quantität zu beurteilen.

In einem „forschenden“ Mathematikunterricht entdecken Schülerinnen und Schüler Muster und Strukturen, Eigenschaften und Beziehungen. Folgende drei Bausteine in Abb. 5 charakterisieren Tätigkeiten im Rahmen eines Unterrichts, der die Forscher- und Entdeckerhaltung der Kinder anspricht:

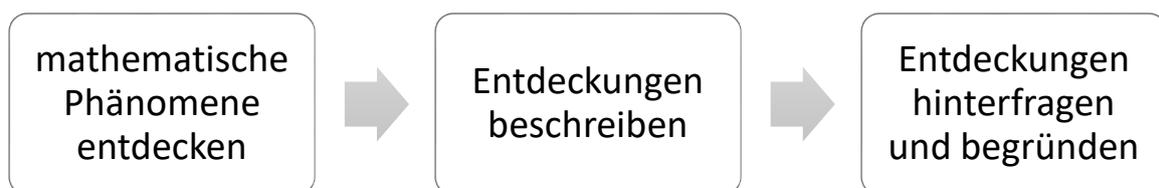


Abb.5: Bausteine für Entdeckendes Lernen (adaptiert nach Bezold 2010, S. 3)

- **Mathematische Phänomene entdecken**
Bevor man Aussagen über Entdeckungen tätigen kann, müssen mathematische Phänomene entdeckt werden. Die Kinder setzen sich produktiv mit mathematischen Situationen auseinander. Alle Exhibits im HdMa ermöglichen es, in ihnen mathematische Phänomene zu entdecken.
- **Entdeckungen beschreiben**
Sobald mathematische Phänomene entdeckt worden sind, müssen sie sprachlich geäußert oder dargestellt werden.
„Ob eine Entdeckung oder ein Muster letztendlich als erwähnenswert, als faszinierend oder sogar „schön“ angesehen wird, ist auch eine subjektive Entscheidung. Dies verlangt einen gewissen Spielraum für den Umgang mit den Entdeckungen von Kindern.“ (Bezold 2010, S. 4)

- Entdeckungen hinterfragen und begründen

Das Hinterfragen von mathematischen Entdeckungen wird zumeist durch die Lehrkraft bzw. adäquate Arbeitsaufträge initiiert. Auf lange Sicht sollte sich aber eine Kultur des „Hinterfragens“ entwickeln und es als selbstverständlich angesehen werden, dass mathematische Aussagen hinterfragt werden und begründet werden (vgl. Bezold 2010). Ziel von Entdeckendem Lernen ist es auch, dass Kinder eigenständig eine Begründungsnotwendigkeit für ihre Entdeckungen erkennen und ihre mathematischen Aussagen bewusst zunächst als Vermutung betrachten, die es zu begründen gilt.

Da die Schülerinnen und Schüler selbstbestimmt Exhibits, mit denen sie sich in der Erlebniswelt auseinandersetzen, wählen können und nicht davon ausgegangen werden kann, dass alle mit allen Exhibits gearbeitet haben, entwickelten wir ein Arbeitsblatt, das den drei genannten Bausteinen zum Entdeckenden Lernen folgt und als Nachbereitung im Unterricht eingesetzt werden kann, siehe Abb. 6. Durch die Aufgabenstellungen werden die einzelnen Bausteine explizit eingefordert.

HdMa **Mein Lieblings-Exhibit**

Das Exhibit heißt Tetraederpuzzle

Und so sieht es aus (Skizze):

Bei diesem Exhibit habe ich Folgendes gemacht:
eine Pyramide gebaut.

Dabei habe ich etwas Interessantes entdeckt:
Alle Bausteile bestehen aus Kugeln.
Immer zwei Bausteile schauen ganz gleich aus.
Es gibt zwei Bausteile, bei denen 4 Kugeln in einer Reihe sind
Bei den anderen zwei Bausteilen sind 3 Kugeln in einer Zweierreihe

Ich vermute, dass hier gezeigt wird

Das ist so, weil

Es ist mein Lieblings-Exhibit, weil
ich es alleine geschafft habe!

Mathematische Phänomene entdecken

Entdeckungen hinterfragen und begründen

Entdeckungen beschreiben

Abb. 6: Beispiel für ein Arbeitsblatt

Mathematische Inhalte wurden im HdMa zu be-greifbaren Exhibits umgesetzt. Beim Besuch im HdMa steht somit der aktive Zugang zu den mathematischen Inhalten der einzelnen Exhibits im Vordergrund. Weitere Angebote aus dem Bereich hdma2school versuchen, den Schülerinnen und Schülern den zu den verschiedensten Exhibits gehörenden mathematischen Hintergrund näher zu bringen. Dies kann aber aus Zeitgründen nicht immer in der gewünschten Tiefe während des Besuchs stattfinden, daher bieten wir auch hier Unterstützungsmaterial für den Transfer in den Unterricht an.

Zum vorhin vorgestellten Exhibit Binärmeter gibt es einen Vorschlag zur unterrichtlichen Einbettung. Mit einem Zaubertrick, der im Unterricht durchgeführt wird, kann das Thema des nichtdezimalen Stel-

lenwertsystems erneut aufgegriffen werden. Die Beschreibung des Tricks und eine zugehörige mathematische Lernumgebung, die es ermöglicht, den Trick durch Suchen nach mathematischen Mustern zu entlarven, werden auf der Webseite des HdMa zu Verfügung gestellt.

Ergänzend gibt es auch eine Umsetzung des Tricks mit GeoGebra. Abb. 7 zeigt einen Screenshot dieser Umsetzung. Man wählt eine Zahl von 1 bis 15 und wählt durch Anklicken all jene Bilder aus, auf denen die gewählte Zahl abgebildet ist. Durch Klick auf „Deine Zahl ist“ erscheint auf magische Weise die gewählte Zahl.

Lieblingszahlen „raten“

Such dir eine Zahl von 1 bis 15. (Verrate sie aber niemandem, nicht einmal dem Rechner ;-)

Auf welchen Bildern siehst du deine Zahl?
(Klicke unter dem Bild auf "Ja", wenn du deine Zahl im Bild findest.)

Klicke anschließend auf "Deine Zahl ist:"

Was ist passiert? Warum? Wie geht das?



Abb.7: Lieblingszahlen raten – Umsetzung in GeoGebra

Das automatisierte Anzeigen dieser Zahl ruft ein Staunen hervor, und darauf basierend kann das Arbeitsblatt in Abb. 8 unterstützen, herauszufinden, warum das Ergebnis der selbst gewählten Zahl hier (vom Computer einfach) angezeigt werden kann.

Wie funktioniert der Trick?

Da du während des Tricks die gezeigten Bilder nach deiner Geheimzahl absuchen musstest, versuchen wir zuerst einmal herauszufinden, welche Zahlen auf den einzelnen Bildern stehen. Vielleicht entdecken wir ja ein Muster?

• Ordne die Zahlen auf dem Bild der Größe nach. Beginne mit der kleinsten.

• Ergänze jeweils die Zahlen in den Kreisen!

• Was fällt dir auf?

Abb. 8: Ausschnitt aus dem Arbeitsblatt zum Exhibit „Binärmeter“

Auch im Exhibit The Game of Tri steckt eine große Bandbreite, die als Ausgangspunkt zum Mathematiktreiben genutzt werden kann. Neben dem „nur das Spiel spielen“, kann ganz gezielt nach einer geeigneten Gewinnstrategie gesucht werden. Das Spiel kann von den Schülerinnen und Schülern variiert werden und aufgrund so einer Variation kann wieder eine Suche nach einer (adaptierten) Gewinnstrategie erfolgen. Aber auch im Spielfeld selbst finden sich viele mathematische Inhalte (Untersuchung und Beschreibung der ebenen Figuren wie Sechseck, Dreieck; Konstruktion eines Sechsecks, Berechnung der vorkommenden Seitenlängen usw.). Reizvoll ist eventuell auch eine Umsetzung in einem fächerübergreifenden Projekt, das Spiel selber nach geeigneten Vorgaben zu gestalten (vgl. Musilek 2020). Konkrete Umsetzungsvorschläge (inkl. Arbeitsblatt) sind in der Zeitschrift *mathematik lehren*, Heft 221 zu finden.

Bei allen Angeboten, die als Transferangebote entwickelt werden, steht das Entdeckende Lernen von Mathematik im Vordergrund. Hauptanliegen ist es, dass Erforschen und Entdecken von Mathematik nicht nach dem Besuch im HdMa beendet sein sollen, sondern die Möglichkeit geboten wird, es in den Unterricht zu integrieren. Ausgangspunkt für die Materialentwicklung ist immer der jeweilige mathematische Inhalt eines Exhibits. Dieser wird dann in eine mathematische Lernumgebung umgesetzt. Die Konzeption der Lernumgebung wird von den Ideen, die im vorangehenden Abschnitt aufgezeigt wurden, geleitet: Hauptziel ist es forschendes, entdeckendes Lernen zu ermöglichen, Schülerinnen und Schüler an mathematisches Forschen heranzuführen. Das kann auf verschiedenen Niveaus passieren, mit verschiedenen Lehr- und Lernmethoden. Bei manchen Stationen bietet es sich an, Technologie wie z.B. dynamische Geometriesoftware für Forschungen zu nutzen, bei anderen geht es um eine bewusste Auseinandersetzung mit den verschiedensten Darstellungsformen auf enaktiver, ikonischer oder symbolischer Ebene. Die Materialien werden auf der Webseite [hausdermathematik.at](https://www.geogebra.org/m/uvrjywg) bzw. in einem GeoGebra Book HdMa Exhibits online (<https://www.geogebra.org/m/uvrjywg>) allen Interessierten zur Verfügung gestellt.

3. HdMa on tour

Rahmenbedingungen zu schaffen, ein Lernen mit bzw. an Exhibits direkt in der Schule in einem Klassenraum zu realisieren, war die Idee eines weiteren Projekts des Haus der Mathematik, das an der Pädagogischen Hochschule Wien umgesetzt wurde. Entstanden ist *HdMa on tour*, eine mobile Version des HdMa. 32 Exhibits wurden adaptiert und dann in drei Kisten verpackt, und können seither genutzt werden, um am eigenen Schulstandort einen mathematischen Lernraum zu gestalten, siehe Abb. 9.



Abb. 9: HdMa on tour: mobile Wanderausstellung macht einen Klassenraum zum Science Center

Die einzelnen Exhibits sind zwar grundsätzlich so konzipiert, dass sie eine niedrige Einstiegsschwelle in das Entdecken von Mathematik bieten. Allerdings ist es organisatorisch nicht möglich, mit den Ausstellungsobjekten auch ausgebildete Explainer an den Schulstandort zu holen, die mit den Kindern gemeinsam daran arbeiten. Daher ergab sich die Notwendigkeit, für die mobile Ausstellung mitzudenken, dass die Lehrpersonen „alleine“ den mathematischen Lernraum gestalten können müssen. Als Unterstützungsmaßnahmen werden einerseits Fortbildungen für Lehrkräfte angeboten und andererseits ergänzendes Material zu den einzelnen Exhibits entwickelt.

Anfangspunkt für das ergänzende Material stellen Anleitungskarten dar, auf denen der Arbeitsauftrag in verbaler Weise präsentiert wird, kombiniert mit einem Forschungsauftrag, siehe Abb. 10. Die sehr heterogenen Gruppen im Schulalltag und der inklusive Gedanke, erfordern zudem aber eine noch differenziertere Herangehensweise. Es hat sich gezeigt, dass jüngere Kinder, Kinder mit besonderen Bedürfnissen oder Kinder mit mangelnden sprachlichen Kenntnissen teilweise einen noch grundlegenden und voraussetzungsloseren Zugang brauchen. Daher bietet HdMa on tour – differenziert erweiterte Lernzugänge, die eine niedrigrschwellige und dennoch entdeckende Herangehensweise für Kinder mit unterschiedlichen Lernvoraussetzungen ermöglichen und somit die Individuallage der Kinder berücksichtigen.

Abb. 10 zeigt alle verfügbaren erweiterten Lernzugänge exemplarisch am Exhibit T-Würfel (vgl. Mulsiek et al. 2018).

- Unterstützung für heterogene sprachliche Voraussetzungen:
Die Anleitungskarte macht das Ziel der Aufgabenstellung den Lernenden allein durch eine piktographische Umsetzung zugänglich.
- Unterstützung der Problemlösekompetenz:
Ein Holzrahmen wird als Orientierungshilfe eingesetzt. Die Lösung wird nicht vorweggenommen, die Lernenden erhalten dadurch Anhaltspunkte auf der enaktiven Ebene.
- Unterstützung in der visuellen Wahrnehmung:
Bei diesem Exhibit werden diesbezüglich zwei verschiedene Differenzierungsmaßnahmen angeboten: Einerseits kann zusätzlich zum Holzrahmen ein Einlageblatt verwendet werden, das die Konturstruktur der einzelnen Legeteile für die unterste Ebene des Würfels enthält. Andererseits gibt es eine Schritt für Schritt Anleitung in Form eines Leporellos.



Abb. 10: HdMa on tour – erweiterte Lernzugänge zum Exhibit T Würfel

4. HdMa – virtuell

Durch die Einschränkungen aufgrund der aktuellen Covid19-Situation, mussten beginnend mit dem Sommersemester 2020 massive Umstellungen erfolgen. Oberstes Ziel war es, dass das Haus der Mathematik Schülerinnen und Schülern, Lehrkräften und Studierenden auch auf digitalem Wege mit seinen Hands-on Ausstellungsobjekten zur Verfügung steht. Daher wurden Exhibits “digitalisiert”. Wir suchten nach Möglichkeiten, die keine aufwendige Programmierung erforderten, sondern aufgrund der Ausnahmesituation durch die Pandemie “rasch” umgesetzt werden konnten. Die Wahl fiel hier auf dynamische Applets, in GeoGebra erstellt. Zurzeit sind im GeoGebra Book „HdMa Exhibits online“ 18 Applets gesammelt und darin nach ihren inhaltlichen Schwerpunkten strukturiert, u.a.: Spiele spielen – Gewinnstrategien entdecken, Geometrie, Kombinatorik, Stochastik, Topologie und Mathemagisches.

Vertiefte Auseinandersetzungen mit Exhibits, wo wir uns als Zielgruppe die Sekundarstufe 2 aussuchten, wurden ebenfalls umgesetzt. Das Exhibit Turm von Hanoi ist ein Spiel für eine Person, siehe Abb. 11. Zu Beginn sind alle Scheiben der Größe nach auf einem Stab angeordnet. Ziel des Spiels ist es, alle Scheiben auf einen anderen Stab umzuordnen. Es gelten folgende Regeln: Man darf in jedem Zug nur eine Scheibe verschieben und es darf nie eine kleinere auf eine größere Scheibe gelegt werden. Mathematisch interessant ist es, herauszufinden, wie viele Züge man mindestens braucht und inwiefern die Anzahl der notwendigen Züge von der Anzahl der umzuordnenden Scheiben abhängt.



Abb. 11: Exhibit Turm von Hanoi

Das Spiel kann im HdMa, mit selbstgestalteten Papierscheiben oder in GeoGebra online gespielt werden. Erweitert wurde das Spiel um eine digitale Lernumgebung, die mit Hilfe von LearningApps.org gestaltet wurde. Kleine interaktive, multimediale Bausteine (Apps) wurden erstellt, die auf der Webseite des HdMa zu einer Lernumgebung zusammengeführt wurden. In dieser digitalen Lernumgebung wird der Fokus gelegt, das Bildungsgesetz für die Anzahl der Züge beim Turm von Hanoi mit Hilfe von Zahlenfolgen zu untersuchen.

Mit “Zeige, was in dir steckt” wurde eine weitere digitale Lernumgebung für die Sekundarstufe 2 entwickelt, siehe Abb. 12. Zu Beginn der Lernumgebung werden drei Exhibits (Ergänzungsbeweis zum Satz von Pythagoras, Binomischer Würfel und Ei des Columbus) aus dem HdMa rein sprachlich beschrieben. Sie müssen den zugehörigen Bildern aus dem HdMa zugeordnet werden. Durch daran anschließende geeignete Aufgabenstellungen wird Anreiz gegeben, sich mit dem jeweiligen mathematischen Hintergrund der drei Exhibits zu befassen.



Abb. 12: Screenshot eines mit LearningApps.org gestalteten Bausteins der digitalen Lernumgebung „Zeige, was in dir steckt“

Aufgrund der Erfahrung, die wir in der digitalen Umsetzung und durch die (zuvor stattgefunden habenden) realen HdMa Besuche sammelten, ergab sich ein neues Projekt: Spielend Mathematik entdecken. Gute und bewährte analoge (physische) Unterrichtskonzepte und Aufgabenstellung wurden in einem Entwicklungsprojekt gemeinsam mit der Pädagogischen Hochschule Wien in digitale Aufgabenformate transferiert.

Bei der Gestaltung dieser digitalen Lernumgebung orientieren wir uns an den Kriterien von Roth (2019, S. 240–241), legen aber den Fokus stark auf die Umsetzbarkeit und die Rahmenbedingungen, die wir im Mathematikunterricht der Primarstufe antreffen.

„Lernumgebungen für den Mathematikunterricht

- sind auf das selbstständige Arbeiten von Lerngruppen oder individuellen Lernenden abgestellt und sollen entdeckendes Lernen ermöglichen,
- sind inhaltlich durchdacht aufgebaut, fachlich korrekt und bieten vielfältige Zugänge zu einem mathematischen Phänomen,
- umfassen geeignete Medien, Materialien sowie Aufgabenstellungen, die hinreichend offen sind, um differenzierend zu wirken,
- setzen einen methodischen und sozialen Rahmen,
- fordern zur Kommunikation und Reflexion über das Erarbeitete heraus,

- *enthalten Aufforderungen zur Dokumentation der Ergebnisse und*
- *bieten bei Bedarf individuell abrufbare Hilfestellungen an.“ (Roth 2019, S. 240)*

Digitale Lernumgebungen nutzen nach Roth (2019, S. 240) das digitale Werkzeug möglichst nicht als einziges Medium, sondern beziehen idealerweise auch gegenständliche Materialien mit ein. Erste Einblicke finden sich im GeoGebra Book “Spielend Mathematik entdecken”.

5. Fortbildungsveranstaltungen für Lehrerinnen und Lehrer

In Untersuchungen wurde darauf hingewiesen, dass völlig unbegleitete kooperative Lernprozesse sich häufig als defizitär herausgestellt haben, was die Verstehens- und Konversationsqualität betrifft, (vgl. Leiss & Tropper, 2014, S. 7ff.). Daher setzt das Fortbildungsangebot, das in Zusammenarbeit mit der Pädagogischen Hochschule Wien entwickelt wurde, genau hier an: es soll konkret erarbeitet werden, wie Lehrkräfte im Sinne einer adaptiven Lehrerintervention Hilfestellungen auf inhaltlicher und strategischer Ebene anbieten können. Um die inhaltlichen Aspekte abdecken zu können, bedarf es einer fachlichen Klärung: Welcher mathematische Inhalt wird in einem Exhibit begreifbar gemacht? In einer ersten Phase der Fortbildung erleben die Lehrkräfte als Lernende die Auseinandersetzung mit den Exhibits: Sie entdecken den Kern der Sache im Exhibit, erschließen sich die durch das Exhibit transportierten (neue) Inhalte. Neben dem Vertrautmachen auf inhaltlicher Ebene wird aber auch die strategische Ebene im Lösungsprozess reflektiert. Die Auseinandersetzung mit den Exhibits ist auf vielfältigsten Verständnisstufen möglich, der Austausch über die verschiedensten Vorgangsweisen bei der Beschäftigung mit dem Exhibit, dem Bewusstmachen, wie vielfältig Denk- und Lösungswege sein können, wird als Chance gesehen, Interventionen auf inhaltlicher und strategischer Ebene mit den Lehrpersonen zu erarbeiten. Die strategischen Hilfen orientieren sich stets am Inhalt und an den Lernenden und werden im Rahmen der Fortbildungsveranstaltung an den einzelnen Exhibits konkretisiert. Die Fortbildung soll in erster Linie Anregungen geben, wie Lehrkräfte den Lernprozess begleiten können. Der konkrete Einsatz wird von vielen Faktoren beeinflusst, vor allem müssen aber die individuelle Potentiale und Fähigkeiten der Lernenden von der Lehrperson berücksichtigt werden und darauf basierend das Lernsetting abgestimmt werden.

Die Fortbildungen sind im Veranstaltungsangebot der Pädagogischen Hochschule Wien zu finden und für Lehrkräfte aller Schularten konzipiert. Der Besuch einer Veranstaltung zum Thema Haus der Mathematik wird als wünschenswerte Voraussetzung für die Entlehnung der Wanderausstellung „HdMa on tour“ gesehen.

5. Resümee

Das Haus der Mathematik mit all seinen Angeboten bietet Rahmenbedingungen für forschende und entdeckende Lernanlässe in Mathematik. Man kann das HdMa als außerschulischen Lernort nutzen und an einer Führung mit einer Schulklasse teilnehmen. HdMa on tour bietet die Möglichkeit, den eigenen Klassenraum in ein mathematisches Science Center zu verwandeln. Unterstützungsangebote für Lehrpersonen sind im Fortbildungsprogramm der Pädagogischen Hochschule Wien zu finden. Der Transfer in den Unterricht lässt sich mit den Angeboten aus HdMa2school umsetzen. HdMa – virtuell bietet die Möglichkeit, sich jederzeit mit digital umgesetzten Exhibits aus dem HdMa beschäftigen zu können. Sucht man nach tiefergehenden Angeboten für die Sekundarstufe, so sind die Lernumgebungen HdMa – Sek 2 empfehlenswert, will man in Spielen Mathematik entdecken, dann kann man die Anregungen aus dem GeoGebra Book in den Unterricht integrieren. All diesen Angeboten ist immanent, dass gerade

die tiefere Auseinandersetzung mit den Exhibits eine empfehlenswerte und bereichernde Ergänzung zum regulären Unterricht darstellt.

Übersicht über die Angebote des HdMa

	Link	Zielgruppe
 HdMa	www.hausdermathematik.at	alle
	Museum (Science Center) mit Fokus auf Mathematik Besuch mit vorab gebuchter Führung möglich	
 HdMa on tour	http://hausdermathematik.at/besuche/hdma-on-tour/	Primarstufe, Sekundarstufe
	„Wanderausstellung“, mobile Version vom Haus der Mathematik 32 Exhibits, um einen Klassenraum in ein mathematisches Science Center zu verwandeln	
 HdMa2school	http://hausdermathematik.at/besuche/schulklassen/hdma2school/	Sekundarstufe 1
	Mathematische Lernumgebungen, die als Ausgangspunkt ein Exhibit des HdMa haben und helfen, eine tiefere Auseinandersetzung mit dem mathematischen Hintergrund nach einem Besuch im HdMa anzuregen	
 HdMa – Sek 2	http://hausdermathematik.at/hdma/hdma_sek2/	Sekundarstufe 2
	Mathematische Lernumgebungen zu einzelnen Exhibits, die im HdMa mit einem QR Code aufgerufen werden können, oder die als Nachbereitung im Mathematikunterricht der Sekundarstufe 2 eingesetzt werden können	
 HdMa – virtuell	https://www.geogebra.org/m/uvrjywgw	Primarstufe, Sekundarstufe
	Exhibits, die mit Hilfe von GeoGebra umgesetzt worden sind und digital bearbeitet werden können	
 Spielend Mathematik entdecken	https://www.geogebra.org/m/bbvkc22j	Primarstufe, Sekundarstufe 1
	In GeoGebra umgesetzte Spiele, in denen Mathematik entdeckt werden kann oder bei denen eine Spielstrategie mit Hilfe von Mathematik untersucht wird	

Literatur

- Bezold, A. (2010): *Mathematisches Argumentieren in der Grundschule fördern*. Kiel: IPN Leibniz-Institut f. d. Pädagogik d. Naturwissenschaften an d. Universität Kiel.
- Ernst, K. (2003): Entdeckendes Lernen – alte Ideen und neue Erkenntnisse. In: Bund Länder Kommission: Entdeckendes Lernen – Lernen entdecken. Die Wissenskonzepte der Kinder im Unterricht aufgreifen, nutzen und in einen systemischen Zusammenhang bringen. Kiel: IPN Leibniz-Institut f. d. Pädagogik d. Naturwissenschaften an d. Universität Kiel.
- Guderian, P. (2007): Wirksamkeitsanalyse außerschulischer Lernorte. Der Einfluss mehrmaliger Besuche eines Schülerlabors auf die Entwicklung des Interesses an Physik. Dissertation. Online verfügbar: <https://edoc.hu-berlin.de/handle/18452/16262> Berlin: Humboldt Universität (Zugriff: 23. 6. 2021).
- Hengartner, E. (1992): Für ein Recht der Kinder auf eigenes Denken. Pädagogische Leitideen für das Lernen von Mathematik. In: *die neue schulpraxis* 7/8, S. 15–27.
- Hengartner, E.; Hirt, U.; Wälti, B. (2006): *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht*. Zug: Klett und Balmer.
- Käpnick, F. (2014): *Mathematiklernen in der Grundschule*. Berlin: Springer Spektrum (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II).
- Leiss, D.; Tropper, N. (2014): *Umgang mit Heterogenität im Mathematikunterricht*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- McLean, K. (1996): *Planning for people in museum exhibitions*. Washington, DC: Association of Science-Technology Centres.
- Musilek, M. (2020). Game of Tri. – in: *mathematik lehren* 221. Seelze: Friedrich. S. 50 – 51
- Musilek, M.; Putz, V. (2017): Binärmeter – wie groß bist du? In: *R&E-SOURCE*. Online verfügbar unter <https://journal.ph-noe.ac.at/index.php/resource/article/view/424> (Zugriff: 23. 6. 2021).
- Musilek-Hofer, M.; Varelija, G.; Varelija-Gerber, A. (2017): Beitrag des Hauses der Mathematik zu den Pädagogisch-Praktischen Studien im Bachelorstudium Primarstufe an der Pädagogischen Hochschule Wien. – in: *Forschungsperspektiven* 9., S. 97 – 115.
- Musilek, M.; Varelija, G.; Miller, M. (2018): HdMa on tour - differenziert. Differenzierte Lernzugänge bei mathematischen Exhibits am Beispiel „Haus der Mathematik on tour“. In: *Zeitschrift für Inklusion*. Online verfügbar unter <https://www.inklusion-online.net/index.php/inklusion-online/article/view/401> (Zugriff: 23. 6. 2021)
- Roth, J. (2019). Digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht – Konzepte, empirische Ergebnisse und Desiderate. In A. Büchter, M. Glade, R. Herold-Blasius, M. Klinger, F. Schacht & P. Scherer (Hg.), *Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht*. Berlin, Heidelberg: Springer. S. 233–248.
- Winter, H. (1989): *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg.

Verfasserin

Monika Musilek
Pädagogische Hochschule Wien
Institut für übergreifende Bildungsschwerpunkte
Grenzackerstraße 18
1100 Wien
monika.musilek@phwien.ac.at

